フレーゲの論理学
──『概念文字』Ｉ，II章研究──

田　畑　博　敏

（昭和56年5月22日受理）

1　『序』

論理は世界を支配する。何人も，論理の法網をくぐり抜けることはできない。むろん，専制君主が民衆を政治権力によって支配するという仕方と同じ仕方で，あるいは宗教的カリスマが人の心を目に見えない形で束縛するという仕方と同じ仕方で，論理が世界を支配するわけではない。論理はしごく“あっさりと”，“あったりまえに”世界を支配する。人は言葉を語りつつ同時に語らないということはできないし，今ここに居てかつ居ないということはできない(──当り前ではないか！)。また，“２＋３＝５”という命題が真であると同時に偽であるということもありえない(──当り前ではないか！)。その通りである，実に当り前のことである。当り前のことを人はわざわざ持ち出さない。存在することさえ意識しない。丁度われわれが，片時も忘れず，休むことなく呼吸しているのに，そのことをほとんど意識しないように。──しかし，その意識しないということ，当り前であるということ，そのことがかえって論理の強い支配の傍証ではないか。意識されないほどに，当り前であるほどに，論理の支配は世界に浸透し世界を貫いている。

しかし，──と人は疑うかもしれない。世界以外に世界に浸透し世界を貫く論理などというものがあるのか，あったとしてもそれをとり出せるのか，とり出してどうするのか。世界は世界でしかない，世界からとり出された「論理」ではなくて世界という「論理」があるのではないか。たとえば，われわれは日常，“彼には彼の「論理」がある”などという。“強者の「論理」”　“政治家の「論理」”なども使われている。また物理学者は素粒子の振舞そのものを素粒子の「論理」とみなし，化学者は化学現象そのものを分子の「論理」と呼ぶかもしれない。であるがしかし，政治家の「論理」や素粒子の「論理」も世界そのものの一部ではなく何らかの言葉による構成を含んでいるのではなかろうか。政治家の「論理」には嘘があり真実(まこと)がある。嘘から真実(まこと)が出ることもある。しかし(上述の)論理には嘘も真実(まこと)もない。素粒子の「論理」は，しかじかの場面でしかじかの理論(theory)によってとらえられた素粒子の姿であり，その姿の記述においてすでに論理が前提され，実際上使われている。少なくとも，人が言葉を使って世界の何事かを把握し，描写しようとするかぎり，論理の支配をまぬがれえないのではないか。論理が世界に浸透しており，世界を貫いているというの

は，まさにその意味においてである。従って，論理は世界の,つまりは事実の,基底に横たわるものであり，ある意味ではそれはとり出せるものではない。つまり，論理自体を考察の対象とするとき，考察の手段である言葉そのものが論理を前提としている，という意味においてである。(1)そのことは承知の上で，なおわれわれは，言語的活動の前提である論理を考察したい。“当り前”である論理の支配が，どういう形で“当り前”であるのか確認したいためである。

Gottlob Frege が1879年に彼の最初の書物である *Begriffsschrift*（『概念文字』）(2)を出したとき，彼の念頭には算術(3)を基礎づけるために算術が前提とする論理を明示的に定式化するという課題があった。『序』の冒頭で，証明を要する真理に二種類あるとフレーゲは考える。第一種の真理は，純論理的な証明によって確立される。第二種の真理は，これと対照的に，経験的事実によって支えられる証明によって確立される。フレーゲは，算術の真理は第一種の真理であるという信念を抱いていた。算術はその基礎となる論理に還元されなければならない。(4)その論理とは，具体的には純粋な思考の法則である。数の概念を定義づけるためには，これを“系列における順序”の概念として示し，これをさらに“論理的な順序”の概念に還元せねばならない。そして，このように論理的な概念に還元された算術の法則を，直観の入る余地のない，完璧な推論の連鎖によって少数の原理から導出してみせなければならない。フレーゲはここで，公理体系として組織された論理体系を考えていたし，実際にそれを創り出した。論理がこのように公理体系として提出できるということは，今日から見ればしごく“当り前”のことであるが，当り前のことを初めて明確にすることはフレーゲの天才のみになしえたことである。

“概念文字”の構想は，推論の構造をはっきりと示すという目的のために立てられた。推論を提示する際，使われる前提はすべて明示されねばならない。こっそりと，別の前提を無断で忍び込ませることはゆるされない。それをゆるすと，推論の連鎖にギャップが生じるからである。また推論がいかなるパターンによって進んでいくか，そのパターン（すなわち推論規則）も予め明示される必要がある。推論の際に最も重要なのは，“概念内容”である。これは客観的な概念の意味内容である[後に詳論される]。このような，推論の明示に対しては，われわれの日常言語より，ある種の人工的な形式言語の方が役に立つ。フレーゲは自らの人工言語を，純粋思考の表現のための形式言語と考えていた。

フレーゲは，日常言語と自らの人工言語の違いを，肉眼と顕微鏡との違いの比喩によって説明する。肉眼は視野が広く，その適用範囲も，さまざまの状況に柔軟に対処できる点で大きい。しかし，顕微鏡は日常の使用範囲では肉眼に劣るものの，肉眼に見えない微細なものを観察するという特殊な使用の場合には肉眼の機能を上まわる。従って，ふだんの生活では肉眼で十分であって顕微鏡の必要は感じられないが，科学的探究の場面において特殊な光学的性能が要求される段になると，肉眼は不十分で顕微鏡が必要となる。これと類比的なことが，日常言語と概念文字(Begriffs schrift)

との間にも言える。日常言語はたしかに，われわれの生活上の要求を満たすものである。しかし，推論とくに算術のそれを明示的に定式化するという仕事においては概念文字が便利でかつ役に立つ。フレーゲは，ライプニッツの普遍代数の構想を音識しており，自らの概念文字は新しい方法の創造であると自負していた。少なくとも，推論や証明の正しさ（妥当性）が問題となる場面で，概念文字は十分用いられる価値があるとみなしていた。

さらに概念文字は哲学者によっても有効に使われうるとフレーゲは考える。フレーゲ自身が，“哲学の難問は言語分析によって解かれうる”というのちの分析派のテーゼを明確に意識したかは問題である。しかし，概念文字という人工言語を使って人間精神を言葉の就縛から解き放つということが，さまざまのヴァリエーションとなって（例えばラッセルの記述の理論，前期ヴィトゲンシュタイン，カルナップの形式的意味論など）展開し，発展することを思えば，今日の言語分析という哲学の常套手段がその起源をフレーゲに持つことも理解できる。(5)

フレーゲ自身，今日の言語哲学の父と目されることはとうてい予想できなかったであろうが，また彼の論理学上の業績がいかに非凡なものであったかも，明確には自覚できていなかったふしがある。[Bynum 1972] は，文献上に現われる，フレーゲの論理学史上の革命的業績とされるものを 11 個あげているが，(6)フレーゲ自身はもっとひかえめに，3つを自らの新機軸として掲げているだけである。フレーゲは“概念文字”を発明しただけでも論理学を進めたことになることを主張する。しかも，記号の新奇さに驚くあまり，その正当な評価まで放棄しないでくれと彼は論理学者に向けて訴えている。二番目の発明は，「主語」「述語」の概念にかえて，「アーギュメント」「関数」の概念を採用したこと。内容（判断の）をアーギュメントの関数とみなすことが，いかに多大の実りをもたらすことになるのか，このことはフレーゲも自覚していた。三番目の発明としてフレーゲが考えているのは，いわゆる論理結合子の定式化である。いずれにせよ，概念文字は算術に応用され，算術を基礎づけることに使われなければならなかった。フレーゲはカントと違い，算術の命題も分析的だと考えた。しかし，それは論理に還元されるという意味において分析的なのであった。それでは，フレーゲが算術をそれによって基礎づける論理とはどのようなものか。以下，『概念文字』のⅠ，Ⅱ章を順次，検討していくことにする。

2　記号および判断（§1—§4）

フレーゲは，以後使われる記号を二種類に区別する（§1）。フレーゲによると，量の一般理論で使われるのは，数や関数を不定的に表わしている文字（変項）と，＋，－，$\sqrt{\ }$，0，1，2のごとき特定の意味をもつ記号（定項）とであるが，これらを量の理論よりもっと一般的な純粋思考の領域においても使うことにするという。フレーゲは，いわゆる自由変項に当るものを「文字」と呼んでいる。文字はさまざまのものを不特定に表示する。これに対して，＋，0，1のような記号は常にあ

る定まった意味をもつ。記号は，記号によって何事かを表示するという基本的機能を担わされる。ただし，その表示という機能に二通りある訳である。即ち，あらゆる文脈を通じて特定の対象あるいは事柄を表示する働きと，文脈に応じて文脈に相対的に（その意味で不定的に）何かを表示する働きとの二つである。何かを不定的に表示する場合も，ある文脈（たとえば推論の際の仮定）が与えられたら，同じ記号が出現している限り，同じ記号は同じものを表示しているとみなされる。

$$F(x) \wedge G(y)$$
$$\therefore \quad F(x)$$

この推論で上段の“$F(x)$”も下段の“$F(x)$”も同じものを表示し，上段の“x”も下段の“x”も同じものを表示する。さらに，不定的に表示するということは，言い方を換えるならば，一般性，法則性を表現することに通ずる。文字式，

$$(a+b)c = ac + bc$$

は，ａ，ｂ，ｃが不定的に数（たとえば実数）を表示することによって，任意の３実数間に成り立つ一般的法則（分配律）を表現することになる。

フレーゲはここで明示的に語っていないが，変項のもう一つの機能，いわゆる束縛変項と今日いわれるものについても，これを導入していた。(「一般性」の議論の際に再度とり上げる）また，アーギュメントの座やメタ変項をギリシア文字で示し，文字（ラテン文字使用）の自由変項としての使い方から区別していることも特筆に値する。

記号の種類を見定めた後，フレーゲは「判断」の議論に移っていく。――判断とは何か？フレーゲの説明によれば，文によって表現された（判断可能な）内容を真と認めることである。いま“磁石の両端極は互いに引き合う”という文を“A”と略記すれば，事実“磁石の両端極は互いに引き合う”という判断は，

$$\vdash\!\!\!\text{——}\, A$$

と書かれる。判断記号，(7)

$$\vdash\!\!\!\text{—}$$

の短い縦棒は判断線と呼ばれ，水平線は内容線と呼ばれる。内容線は，その右側の記号，あるいは記号結合をまとまった一つの内容（文の意味内容）に結合する働きをする。もちろん内容にも判断可能な内容とそうでない内容がある。たとえば“馬”という語は，これだけでは判断可能な内容ではないから，本来内容線の右には位置しえない。判断記号（あるいは断定記号 assertion sign）から判断線を除いて，たとえば，

$$—— A$$

なる表現を考えるとする。するとこれは，“A”を先述の文の略記表現とすると，“磁石の両端極は互いに引き合う”という判断可能な内容を表現することになる。

判断と判断内容（判断可能な意味内容）を区別し，その区別を表現しうる記号を導入したことは，H. Sluga も指摘するように，(8)フレーゲの重要な功績の一つであろう。しかし，判断内容と区別される，いわば判断そのものとは論理的にどのような身分のものなのか？判断はたしかにわれわれのある行為であり精神作用であるという側面をもつ。日常会話でも，われわれは判断（断定）する場面に出会う機会はめずらしくない。旅行者に“久松公園は鳥取駅の南側にありますか？”と聞かれたら，われわれは“いえ，久松公園は鳥取駅の北側にありますよ”と答えるであろう。その場合，われわれは「久松公園は鳥取駅の北側にある」と断定している。旅行者を困らせてやろうという意地悪な意図がないかぎり，通常は上の答えが旅行者に返るであろうが，当然のことながら上述の答（つまり文）の内容は真であるという意図の下に答えられるのである。答え手は，「“久松公園は鳥取駅の北側にある”という判断内容は真です」などとは言わないであろう。また，「久松公園は鳥取駅の北側にあると私は断定します」と答えて，旅行者に鳥取人は堅固しいことを言うという印象を与えることも，まずあるまい。判断する，断定する，即ち真なることを語っているとの意図の下での説明は，われわれの日常の慣用的な判断の用法である。(9)内容線を伴う表現は，「…という事態」，「…という状況」「…という思想」などとパラフレーズできるが，判断記号を伴う表現に対して，「…と断定する」とか，「…と私は判断する」とパラフレーズはできないのではないか。(10)というのは常に，本当に断定したのか，本当に判断したのか，偽ってあるいは誤って断定したのではないか，ということが問い返されうるからである。なぜなら，「私は……と判断する」ということ自体が一つの判断可能な意味内容となってしまうからである。そしては本当に判断したのか，そのような精神的な作用が事実あったか，という心理的事実問題へと問題が変質する危険すらある。むしろ，判断記号は，判断という行為を遂行することを示す遂行演算子（performative operator）（[Bell 1979] p. 98 の言い方）であり，（Wittgenstein 流の言い方をすれば）「示して」いるのであって述べているのではない。その場合も，行為としてみられた判断は，判断者の主観的意図の内部に閉ざされた行為ではなくて，対話，あるいは推論という公共の場に参加する行為と考えられねばならない。推論と

いう公共の場によって，判断記号のメタ言語としての役割は支えられ，すでに前提されているのである。推論するとき，われわれは真であるとみなして，前提をおくのである。

フレーゲは判断記号は常に判断内容の左端に置かれる，とさりげなく説明する。判断記号が判断内容の一部分として登場することはない。たとえば，“証明可能”という公理体系についてのメタ言語は，メタ論理あるいはメタ数学の文脈で，判断可能な内容の一部として十分登場しうる。“論理式Aは証明可能であるが，論理式Bは証明不能である”という断定が，メタ論理で十分意味を持つからである。判断そのものは，いかに高次の“メタ”の議論においても対象化されることはない。判断記号が内容の左端に置かれることのもう一つの効果は，判断というものが内容全体に関わっているのであってその部分に作用することはないということである。Bellの例を借用すると[11]，

$$\vdash\!\!-\, P \quad \therefore \vdash q_{\circ} \quad \text{かつ} \vdash\!\!-\, \sim p \qquad \cdots\cdots ①$$

は矛盾である。が，

$$\vdash\!\!-\, P \supset q \quad \text{かつ} \vdash\!\!-\, \sim p \qquad \cdots\cdots ②$$

は矛盾でない。①で“p”は断定されているが，②での“$p \supset q$”の一部分である“p”は断定されていないからである。

このように，判断が内容全体にかかわるわけは，内容線がすでに「全体」としての内容を把握しているからである。では内容とは何か。何をもって同一の内容といえるのか。フレーゲは，

“ギリシア軍はプラタエアでペルシア軍を破った”

という文と，

“ペルシア軍はプラタエアでギリシア軍に破られた”

という文を比較する。この二つの文は，主語・述語を異にし，微妙な意味の相違を持つことは事実である。しかし，前者といくつかの他の命題とから導出される結論と，後者といくつかの同じ他の命題とから導出される結論は同じであろう。従って，これら二つの文はある同じ意味内容を共有しているとみなされる。そしてその同じ意味内容を，それぞれの文の内容と呼ぶ。フレーゲは，基本的に推論という場面を考えている。この場面において実質的に働く意味内容のみを内容とみとめる。即ち，文の内容とは“推論によって同一な結論を導く”という関係によって定められる同値類であ

る。主語・述語から判断が成り立っているという伝統的判断論からフレーゲは決定的に訣別する。主語・述語の異同は判断内容には，従って判断には直接には無関係である。「アルキメデスはシラクサの（ローマによる）征服のときに死んだ」という判断は，判断「アルキメデスのシサクラの（ローマによる）征服時の死は事実である」と同じである。ここで，通常の意味での主語・述語の別を云々しても無駄である。あらゆる文を上のように名詞化して，「……は事実である」を唯一の述語とする言語体系をつくってもよい，とフレーゲは言う。彼の言い方では，「概念文字」の言語体系もこのような体系であり，“├─”はすべての判断の共通述語なのである。

伝統的論理学（アリストテレスの論理学とその中世の発展形態）は，概念→判断→推論という形で組織づけられているといえる。アリストテレスの *Categoriae* で第一実体・第二実体の区別がなされ，判断（少なくとも三段論法という推論に現われるかぎりでは）は第二実体間の包摂関係とみなされる（即ち概念間の包摂関係)。そしてその包摂関係の正しい法則が正しい推論なのである（『分析論前書』)。言いかえれば，推論とは判断と判断の関係でなく，概念間の関係であった。その意味で伝統的論理学は名辞論理学（あるいは概念論理学）である(12)。これに対してフレーゲの論理学は判断が概念に論理的に先行する(13)。推論は判断と判断との論理的関係であり，概念は判断からつくられる(14)。フレーゲにとっては全称判断と特称判断の違いは判断自体の相違ではなく，判断される内容の相違であり，判断はあくまでただ一つである。肯定・否定も判断の種類ではなく，判断内容の種類である。「否定」は判断を否定するのではない。肯定の形の内容を否定して「否定」という新しい内容をつくるのである。「否定」によって世界の部分が分断されるのではない。「否定」は思想内容の一部なのである(15)。

われわれの *Begriffsschrift* では，上述のように内容線の右に位置する記号は判断可能な内容を表現するものでならなければならなかった。ところが1891年以降，フレーゲの思想の深化に伴って内容線がある種の「関数」とみなされるようになる。論文『意味と指示対象について」(Über Sinn und Bedeutung 1892)）において，意味の二つの側面（Sinn と Bedeutung）が区別され，この区別が文にも及ぶことが主張されることになる(16)。文の意味（Sinn）とは文の意味内容すなわち文が表現する思想 (Gedanke) であり，文の指示対象 (Bedeutung) とは真理値であるといわれる。しかもこの時期のフレーゲは，関数のアーギュメントの領域を全対象領域とみなしていた。それゆえ，*Begriffsschrit* では許されなかった，

———ユリウス・シーザー

というような表現が認められることになる。そして，

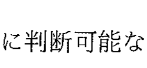
$$——\xi$$

という関数が考えられる。アーギュメントの座“ξ”に真なる内容（思想 Gedanke）がアーギュメントとしてとられたとき，この関数の値は真となり，そうでないときこの関数の値は偽となる[17]。文がある意味で複合的な名であるという観点が『意味と指示対象について』で開かれて以来，文の内容が対象としてみられる傾きが強くなる。これは，判断の内容を一つのまとまった全体としてとらえ，概念ではなく判断を論理的に先だとする考え方の，当然の帰結であろう。[Frege 1891] でみられるような関数の考え方の深化とともに，判断内容（のちの思想 Gedanke）そのものが（“真”という対象として）アーギュメントとみられるわけである。これは実質的に真理関数の考え方に到達している。文の表示的意味 (Bedeutung)＝真理値をアーギュメントとし，同じく真理値を値とする関数の一つが，“ξ———”なのであるから。ヴィトゲンシュタインの真理関数と違うのは，アーギュメントとして真理値以外の対象も認めている点である。

判断が概念に論理的に先行するというフレーゲの考え方は，以上のような真理関数の考え方に発展したが，*Begriffsschrift* においてもすでにもとになる考え方が述べられている。ただ，*Begriffsschrift* においては，推論が判断と判断の間の関係としておさえられているゆえに，判断の成立・不成立という形で論理結合子が考えられる。次節でそのことを見ていくことにする。

3　条件法と否定（§5—§7）

推論という場面を考えてみよう。「AならばBである」，ところで「Aである」。従って「Bである」。この推論はむろん妥当な推論である。上の推論において，“ならば”という言葉と“従って”という言葉が登場している。どちらも似たような意味をもつと思われるが，論理的にはこれらははっきり区別されねばならない。このことを理解し，公理と推論規則をはっきり区別した最初の人もフレーゲであった[18]。通常「ならば」という言葉は「そして」「または」などとともに論理結合詞と呼ばれ，真理関数として説明される。フレーゲはこれを肯定・否定の制断の一つとして説明する。まず「BならばA」という（肯定形の）判断は，

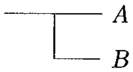


と記号化される。ここで，A，Bはともに判断可能な内容を表現する文である。A，Bは肯定されているか否定されているか，によって以下の4つの場合が生じる。

(1)　Aが肯定，　Bが肯定
(2)　Aが肯定，　Bが否定
(3)　Aが否定，　Bが肯定

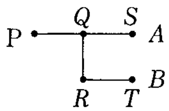
(4)　Aが否定，　Bが否定

判断：「BならばA」が主張するのは(3)が生じないということである。裏を返せば，



の否定は(3)が生じるという内容である。フレーゲは条件法「BならばA」を質料含意（material implication）としてとらえている。日常語の「ならば」はさまざまな関連を意味しうる——たとえば因果的な結びつき（causal connection）——が，質料含意は「ならば」の最大公約数的な意味をもつ，ごく弱い結びつきの表現でしかない。

Slugaも指摘するように[19]，(1)〜(4)の肯定・否定は，真・偽とほぼ同じ意味をもつ。真理関数としての「ならば」を定義するには真理値を用いねばならぬが，判断として定義する場合はこのような形になるであろう。この場合，先述のように，肯定・否定は断定・否断定ではない。肯定という内容，否定という内容を断定（判断）するのである。内容線，その他の定義も生きている。即ち，



において，

QR：条件線
PQ：条件法全体の内容線
RT：Bの内容線
GS：Aの内容線

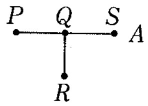
と理解される。

さて，先ほどの「従って」に当たる言葉はフレーゲの概念文字の中には含まれていない。その代わり，ただ一つの推論のパターンに従ってすべての推論が進行するという，その推論の形態そのものの中に「示されて」いる。そのただ一つの推論のパターンとは，いわゆるModus Ponens[20]の推論規則である。（実際には代入規則も明示さるべきであるが，フレーゲは明示しておらず，暗黙のうちに承認して実際に使っている）フレーゲは，命題論理の論理法則がこの推論規則だけから推論されることを自負している。アリストテレスは有限個の妥当な推論規則をかかげたが，有限個で止める理由はなく無現に多くかかげてもよい，われわれは“見通しのよさ”を考慮して一つに限定する，とフレーゲは述べている。

フレーゲにおいては「否定」も内容の一部であるから，「Aでない」という否定の形の内容を表わす記号も必要となる。「Aでない」という内容は，

——┬—— *A*

と表現できる。これを分解すると，



となる。短い縦棒ＱＲが否定線であり，ＱＳがＡの内容線，ＰＱが「Ａでない」（という否定）の内容線である。“—┬—Ａ”はあくまで”，「Ａでない」という否定内容にすぎない。「(事実）Ａでないのである」と断定しているのでなく，ただ「Ａでない」という観念を呼びおこす否定内容にすぎない。

条件法と否定とによって連言（ＡかつＢ）と選言（ＡまたはＢ）も表現できる。なぜなら，条件法が元来質料含意として定義されており，「ＢならばＡ」は「ＢでありかつＡでないことはない」と表現できるからである。従って，「ＢかつＡ」は「ＢならばＡでないことはない」となる。また「ＢまたはＡも同様に「ＢでないならばＡ」と表現できる。ブールが，連言と選言と否定とを使ったのに対し，フレーゲが条件法と否定を使ったのは，前者が論理をある種の代数とみなしたのに対し，フレーゲが推論を論理が生きる基本的な場と考えたせいであるかもしれない[21]。ともかく，フレーゲは条件法と否定とで，公理体系としての命題論理を展開する最初の人となる。

フレーゲはまた，日常の用法と概念文字に出てくる言葉の用法との相違に留意している。例えば，「しかし」という語は「対立」，「意外さ」という言葉を，いわば話者の気持の反映として，意味の一部に含んでいるであろう。その点で，「そして」という言葉と全く同じ意味をもつとは言いがたいし，全く同じような文脈で使われるのでもない。しかし，『概念文字』に登場するとき，「そして」も「しかし」も論理的に同じ働きをする点で同じ論理的意味をもつとみなされる。推論という場では，「しかし」も「そして」も同一の働きをするからである。「または」についても，exclusive or ではなく，inclusive or の働きをこれに与えるのは，推論の場面でこちらが都合が良いからである。

以上で，命題論理を展開するための準備は整った。しかし，尚，述語論理を展開するには不十分である。次節で、そのための，“同一”“関数”“一般性”についての検討を試みる。

4　同一，関数，一般性（§8～§13）

ここでフレーゲのいう「同一」とは「内容の同一」ということである。フレーゲの概念文字はすべてある意味内容を持つ。記号（概念文字）には，それが表示する意味内容があるが，別の記号が

同一の内容を表示することも起こりうる。丁度，同一人物が本名以外の別名（ペンネームや芸名やあざなやあだ名・ニックネーム）でも呼ばれるように。するとそのとき，名Aと名Bとは同一物を表示するという判断がなされることになる。この判断は通常の判断と異なり，内容そのものについての判断ではなく，内容を表示する記号についての判断ということになる。判断「記号Aと記号Bとは同一内容を表示する」を表現するために，新たに必要とされるのが，「内容の同一」を表わす記号"≡"である。そうすると，判断，

$$\vdash\!\!\!\!\!\!\!\!\!—\!\!—\;(A \equiv B)$$

に登場する記号は内容を表示するのではなく，記号を表示することになる。「A」と「B」は記号A，記号Bを表示し，「≡」は記号のふるまい・記号間の関係（同一内容を表示するという記号間の関係）を表示することになる。今までの記号はすべて，記号に対応する言語外の意味内容を表示した。ここで，意味内容ではなくて記号そのものを表示する，新しい記号の使い方を導入したことによって，記号の「意味」に分裂が生じたともいえる。フレーゲもそのことは承知していた。しかしこのことが，われわれの関心が内容ではなく表現そのものにあることを含意する訳ではないことを，フレーゲは強調する。

「内容の同一」の記号を導入するにはそれ相当の理由がある。フレーゲは幾何学から例を引いている。下図（[Bynum 1972] p.125 より）で，点Aは円周上の一点，ABは直径を含む半直線で，固定されたAを中心に矢印方向に回転する。この回転により，半直線と円周との交点Bは連続的に位置を変える。換言すると，半直線の位置が確定されたときはじめて，名「半直線と円周との交点B」は確定した点を表示する。今，名「半直線が点Aを含む直径と直交するときの半直線と円周との交点B」は何を表示するかといえば，これは点Aにほかならない。するとここで，同一の点が二通りの仕方で特定されたことになる。感覚により直接的に「A」と名づけることによる特定と，「…なる交点B」という特定と，である。この異なる二通りの特定の仕方に応じて，それを表現する名（記号）も異なる。異なる二つの名によってある同一のものが表示されうるということには，その異なる名に応じる異なる特定の仕方が存在することが含意される。われわれは同一の意味内容をさまざまの表現手段によって表現しうるということ，このことはわれわれの認識の問題にも関わることである。あるものを特定（あるいは同定）するとき，必ずしも一通りのではなく，多数の認識ルートによってそのものに到達できるのである。

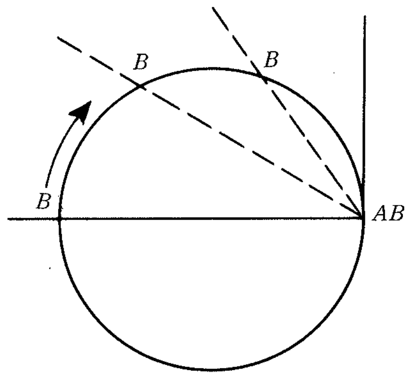


図1

この，特定の意味内容（＝特定されたもの）と，その特定の仕方という観点は，のちに言葉の「指示対象」(Bedeutung)と「意味」(Sinn）の区別——言葉の「いみ」の二つの側面——という形で，フレーゲ自身の思想の中で深化される（[Frege 1892(1)]）。はからずも，このときの論文『意味と指示対象について』は，同一性を表現する命題の意義の考察から始まっている。(ただし,ここでフレーゲは「同一性」というものを記号と記号の間の（同一対象を名指すという）いわばメタの関係としてではなく，記号によって名指されるもの同志の関係として考え直している。)名は，固有名にしろ，確定記述によるものにしろ,名指すべき対象をもつとともに名指しの仕方を自らに伴っている。その名指しの仕方が意味(Sinn)である。『概念文字』の段階では，意味（Sinn）と指示対象（Bedeutung）の区別という観点は(22)，明確な形においては未だない。しかしその萌芽が，「内容」と内容の「特定の仕方」という形で見えている，といえる。

フレーゲの「内容」はのちの「指示対象」や「対象」の概念に発展するものであるが，いずれにしろそれ自身で独立した，完結した論理的存在（logical entity）であることが，根本的特徴といえる。これに対して「関数」はそのようなものではない。フレーゲの「関数」の説明は，その導入的部分においては，syntactic (構文論的) なものであるが，実はそれ以上の意義をもつものといえる。まず，関数は文からつくられる。文，

「水素は二酸化炭素より軽い」　……①
「酸素は二酸化炭素より軽い」　……②
「窒素は二酸化炭素より軽い」　……③

において，「水素」「酸素」「窒素」は置き換えられうる部分，「二酸化炭素より軽い」は置き換えられない部分とみなしうる。つまり，文という完結した論理的存在が置き換え可能な部分（アーギュメントと呼ばれる）と，置き換え不可能な部分（関数と呼ばれる）とに分節化されうること，そして文がアーギュメントの関数とみなさるということ，これがフレーゲの基本的発想であった。むろん，この分節的見方は，各文において一意的に決まっている訳ではない。上述の①において，「二酸化炭素」をアーギュメントとみなし，「水素は——より軽い」を関数とみなすこともできる。基本的なことは，アーギュメントは完結的なもの（対象）であるが，関数は空白部分をもつ不飽和な（unsaturated）ものであるということである。フレーゲ自身も強調しているように(23)，主語・述語の区別に替えてアーギュメント・関数の区別を基本としたこと，これがフレーゲの，クラス論理，関係論理を含む述語論理の一般的展開を可能にした発想であった。

ここで注意しなければならないのは，内容 (Inhalt, content) をアーギュメントの関数とみるのであって,その逆ではないということである。その逆ではないとはつまり,概念と対象が先にあって,それらから判断がつくられるのではないということである。むろん,判断とは対象が概念に属するか否か

の判断であり，対象が他の対象といかなる関係にあるかの判断であるが，概念が判断に先立つ訳ではない。「概念から判断をつくる」のではなく反対に，「判断から分析によって概念に達する」というのがフレーゲの行き方なのである[24]。このことは十分に強調さるべきことであると思われる。推論はなによりも判断と判断との関係であって，概念と概念との関係ではない。判断と判断の間の関係が整理されて（命題論理），それ以後に対象と概念という分節化が行なわれ，概念あるいは関係同志の関係（これらも判断と判断の関係を基本にしている）へと進みゆく（述語論理），――このことによって，初めて，少なくとも数学的理論の十分な表現が可能になったのである。

フレーゲの「関数」概念はのちに[25]発展し，関数表現に対してもある種の「指示対象」が考えられる文脈が存在するようになる[26]。また『概念文字』と1891年以降の諸著作とで「関数」の概念がどう変わったかについても解釈者たちの間で不一致がある[27]。しかしともかく，文を，置き換えられうる部分と置き換えられない部分とに分節化することによって，文の内容がアーギュメントの関数とみなされたこと，これがく『概念文字』においてなされていることは確認されねばならない。またさらに，関数自身が不定的に表現される記法も考えられていることが注意されるべきである。たとえば，

$$\Phi(A)$$
$$\Psi(A, B)$$

といった表現は各々，Aをアーギュメントとしてもつ関数，及び，A，Bをアーギュメントとしてもつ関数を不定的に表示している。従って例えば，判断，

$$\vdash\!\!\!\!\text{———}\ \Phi(A)$$
$$\vdash\!\!\!\!\text{———}\ \Psi(A, B)$$

は各々，“Aは性質 ϕ をもつ”，“BはAと ψ という関係にある”あるいはBは対象Aに ψ なる手続きをほどこした結果である，と読める。ここで通常の関数をアーギュメントとしてとる高次の関数概念が考えられている。（これは『概念文字』の第三章の「系列」の一般理論に関連してくるが，小論の考察外にあるので注意するにとどめる）

関数とアーギュメントという道具立ては，一般性を表わす文 (general sentence) を表現することを可能にした。フレーゲも述べるように，

「20は4つの数の平方の和として表現できる」

「すべての正の整数は4つの数の平方の和として表現できる」

なる文において，「20」と「すべての正の整数」がともにアーギュメントとみなせる訳ではない。「20」という語と「すべての正の整数」という語は同じレベルの言葉ではない。「20」はある特定の存在(entity)を表示する単称名（固有名）であって，これはアーギュメントになりうる。しかし，「すべての正の整数」という言葉は，これだけでは何も意味しない。上の文全体の中の一部分として出現してはじめて意味をもつ[28]。

われわれはある特定のものについて，それがある性質をもつということを述べるとともに，任意のもの，あるいはすべてのものについてそれがある性質をもつことを述べる場合がある。すなわち一般性を表わす文を表現する必要のある場合がある。その場合，たとえば ϕ(a) という文があればこの“a”についてのみならず他のものについてもそれが ϕ であるということを表現したいわけである。言い換えれば ϕ(a) という文の“a”をアーギュメントとみて，ϕ(　) を関数とみて，その上で，“アーギュメントとして何をとろうともそれは ϕ である”と主張したいのである。これを表現するフレーゲの概念文字は，

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!\!-\Phi(\mathfrak{a})$$

である。この記法は，判断

$$\vdash\!\!-\!\!-\Phi(a)$$

からつくられるが，アーギュメントとみなした“a”をドイツ文字“$\mathfrak{a}$”に替え，さらに内容線の真中に“くぼみ”(concavity) をつくりそのくぼみの中にドイツ文字“$\mathfrak{a}$”を入れることによって出来る。これで，「すべてのものは ϕ である」と読む。文法的な主語「すべてのもの」を，これだけ取り出しても無駄なのである。これだけでは何の内容も表示しない。一般性の表現は，このように，関数のアーギュメントとみられた文の一部分への代入可能性を主張する文として表現されるとき初めて正確に表現される。むろん，判断

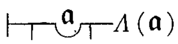
$$\vdash\!\!-\!\!-\Phi(a)$$

の“ϕ”がアーギュメントとみられることもできるから，

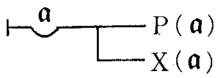
$$\vdash\!\overset{\mathfrak{F}}{\smile}\!\!-\mathfrak{F}(a)$$

即ち“いかなる性質 $\mathfrak{F}$ をとっても a はそれをもつ”という判断も表現できる。

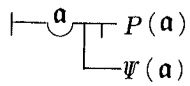
一般性を表わす文に関して，フレーゲは，全称除去の推論[29]が正しいこと，また“くぼみ”がドイツ文字の束縛範囲（scope）を示すことを説明し，束縛変項改名規則を述べている。さらに二つの全称化の推論[30]を正しい推論としてあげている。全称の束縛変項をドイツ文字で示し，束縛される自由変項と自由変項をラテン文字で示して，フレーゲは束縛変項をはっきり区別している。これで述語論理を展開するには十分である。存在（あるいは特称）はフレーゲの記号では，

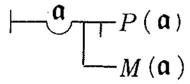


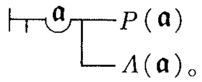
で表わされ，特別に他の記号を要しない。全称肯定判断“すべてのXはPである”は，



と表現でき，全称否定判断“いかなる Ψ もPではない”，特称肯定判断“あるMはPである”，特称否定判断“ある Λ はPでない”，もそれぞれ以下のように表現できる：







これらの判断の内容の間には次の図のような関係がある。

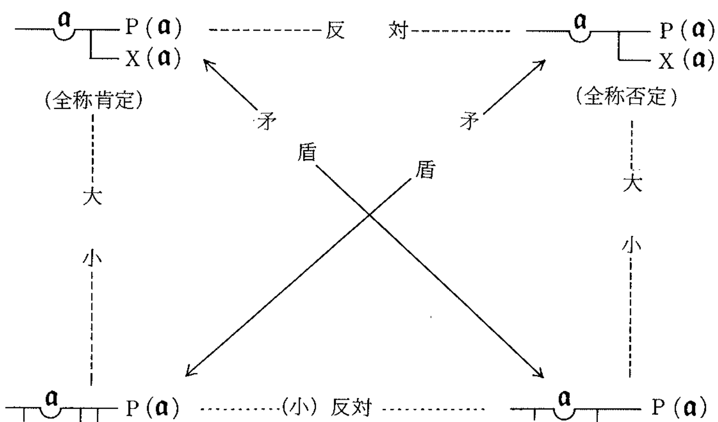


図2

伝統的論理学の対当表と違い，反対関係にある全称肯定と全称否定は，ともに真でもともに偽でもありうるし，小反対関係にある特称肯定と特称否定も同じくともに真でも,ともに偽でもありうる。また大小関係の間に含意の関係はない。フレーゲの全称肯定にはいわゆる存在含意(existential import)がないからである[31]。

5　命題論理の展開（§13—§19）

フレーゲは第二章（§13～§22）で，命題論理と等号をもつ述語論理を公理体系として展開する。そこで，まず命題論理から検討を加えていこう。

フレーゲは,「純粋思考の判断」と彼が呼ぶ論理法則を少数の中核となる命題(公理)から導き出そうとする。このような公理体系をつくる意義は，一つ一つの論理法則の論理的正しさを知るだけでなくそれらの相互関係を知ることにある。論理法則は無数にあるであろう。無数にあるものをすべて書き並べることはできない。そこで公理体系をつくり、少数の論理法則から他のすべてのものを導出できることを示すことによって,可能的にわれわれはすべての論理法則を手に入れることになる。もちろん公理体系のつくり方は唯一つとは限らない。フレーゲもそれは承知していた。ただ，このようにしてつくられる公理体系はできれば可能的にすべての論理法則を導出できるものであってほしい。その意味で完全であってほしい。フレーゲはこの完全性（すべてのトートロジーが導出可能であること）が彼自身の体系に備わっていることを暗黙のうちに前提しているようであり，それを改めて証明しようとはしていない。彼は命題論理の範囲で51個の命題を「純粋思考の判断」として提示するが，このように多数の命題が導かれることによって彼の公理体系が完全であることは当然のことと考えたのであろう。

フレーゲ自身は公理体系のシンタックスを明示していないが，明示するとすれば こうなる。

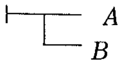
命題変項：a，b，c，d，e…（これらは判断内容を表現している）

判断の形成規則：

（i）αが命題変項のとき，$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\, \alpha$ は判断である。

（ii）A，Bが判断から判断を取り除いた残りの表現であるとき，$\begin{array}{l}\vdash\!\!\!\!-\!\!\!\top\!\!\!-\, A\\ \quad\ \llcorner\!-\, B\end{array}$，$\vdash\!\!\!\!-\!\!\!\top\!\!\!-\, A$ は判断である。

実は上の形成規則はまだ不十分である。判断が判断線以外に内容線という連続なものを含むゆえに，[Frege 1893] §6 で述べられているように，内容線を左にもつ二つの判断内容表現から新しい判断をつくるために内容線同志の融合(Verschmelzung, amalgamation)が許されなければならない。いま，Aを—a，Bを—bとするとき，内容線の融合によって

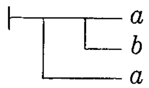


は，

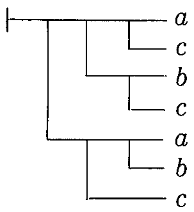
となるのである。『概念文字』では内容線の融合のことは，内容線の説明のうちに含まれているとみてか，明示的には述べられていない。

さて次に，“少数の核となる判断”（即ち公理）とは次の6個である。（左の番号はフレーゲがつけた通し番号である。）

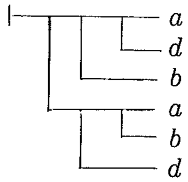
(1)



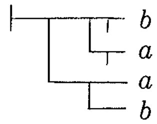
(2)



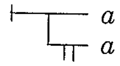
(8)



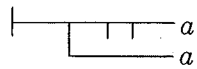
(28)



(31)



(41)



このうち(1)，(2)，(8)は条件法の記号のみを含み，(28)，(31)，(41)は条件法と否定とをともに含む。

見ての通り，フレーゲの記号は二次元的な広がりをもつ。このため，この記法に慣れると推論の進み方，個々の命題の内部構造が見てとりやすい。しかし，多くのスペースを取るのが欠点である。記号法としては，数学の大部分においてそうであるような線型のものが好まれるためか，フレーゲのものは今日使われなくなった。（線型のものにならなかったら，Hilbent, Gödel, Tarski らのメタ論理的研究は発達しなかったろう，という Sluga の意見(32)はフレーゲには酷というものだ。）今日の流儀で書けば，上記の公理は次のように書ける。（断定記号は省く）

(1) $a \supset (b \supset a)$

(2) $(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))$

(8) $(d \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (d \supset a))$

(28) $(b \supset a) \supset (\sim a \supset \sim b)$

(31) $\sim\sim a \supset a$

(41) $a \supset \sim\sim a$

今日の記法は，資源節約には適うが，複雑な式でかっこが多くなるとフレーゲのものより読みとりにくい（そのことは後に実例で示されることになる）。

推論規則は，モドゥス・ポネンス[33]と（同時代入を許す）代入規則である。第三節で述べたように代入規則は明示されていないが，実際に使われている。

フレーゲが掲げている「純粋思考の判断」を今日流の記法で全部書いてみると，こうなる。

(1) $a \supset (b \supset a)$

(2) $(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))$

(3) $(b \supset a) \supset ((c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a)))$

(4) $\{(b \supset a) \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{(b \supset a) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}$

(5) $(b \supset a) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))$

(6) $(c \supset (b \supset a)) \supset (c \supset ((d \supset b) \supset (d \supset a)))$

(7) $(b \supset a) \supset ((d \supset (c \supset b)) \supset (d \supset (c \supset a)))$

(8) $(d \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (d \supset a))$

(9) $(c \supset b) \supset ((b \supset a) \supset (c \supset a))$

(10) $\{(e \supset (d \supset b)) \supset a\} \supset \{(d \supset (e \supset b)) \supset a\}$

(11) $((c \supset b) \supset a) \supset (b \supset a)$

(12) $\{d \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{d \supset (b \supset (c \supset a))\}$

(13) $\{d \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{b \supset (d \supset (c \supset a))\}$

(14) $\{e \supset (d \supset (c \supset (b \supset a)))\} \supset \{e \supset (b \supset (d \supset (c \supset a)))\}$

(15) $\{e \supset (d \supset (c \supset (b \supset a)))\} \supset \{b \supset (e \supset (d \supset (c \supset a)))\}$

(16) $\{e \supset (d \supset (c \supset (b \supset a)))\} \supset \{e \supset (d \supset (b \supset (c \supset a)))\}$

(17) $\{d \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset (c \supset (b \supset (d \supset a)))$

(18) $(c \supset (b \supset a)) \supset \{(d \supset c) \supset (b \supset (d \supset a))\}$

(19) $(d \supset (c \supset b)) \supset \{(b \supset a) \supset (d \supset (c \supset a))\}$

(20) $(e \supset (d \supset (c \supset b))) \supset \{(b \supset a) \supset (e \supset (d \supset (c \supset a)))\}$

(21) $((d \supset b) \supset a) \supset \{(d \supset c) \supset ((c \supset b) \supset a)\}$

(22) $\{f \supset (e \supset (d \supset (c \supset (b \supset a))))\} \supset \{f \supset (e \supset (d \supset (b \supset (c \supset a))))\}$

(23) $\{d \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{(e \supset d) \supset (c \supset (b \supset (e \supset a)))\}$

(24) $(c \supset a) \supset (c \supset (b \supset a))$

(25) $(d \supset (c \supset a)) \supset (d \supset (c \supset (b \supset a)))$

(26) $(b \supset (a \supset a))$

(27) $a \supset a$

(28) $(b \supset a) \supset (\sim a \supset \sim b)$

(29) $(c \supset (b \supset a)) \supset (c \supset (\sim a \supset \sim b))$

(30) $(b \supset (c \supset a)) \supset (c \supset (\sim a \supset \sim b))$

(31) $\sim\sim a \supset a$

(32) $\{(\sim b \supset a) \supset (\sim a \supset \sim\sim b)\} \supset ((\sim b \supset a) \supset (\sim a \supset b))$

(33) $(\sim b \supset a) \supset (\sim a \supset b)$

(34) $(c \supset (\sim b \supset a)) \supset (c \supset (\sim a \supset b))$

(35) $(c \supset (\sim b \supset a)) \supset (\sim a \supset (c \supset b))$

(36) $a \supset (\sim a \supset b)$

(37) $((\sim c \supset b) \supset a) \supset (c \supset a)$

(38) $\sim a \supset (a \supset b)$

(39) $(\sim a \supset a) \supset (\sim a \supset b)$

(40) $\sim b \supset ((\sim a \supset a) \supset a)$

(41) $a \supset \sim\sim a$

(42) $\sim\sim (a \supset a)$

(43) $(\sim a \supset a) \supset a$

(44) $(\sim a \supset c) \supset ((c \supset a) \supset a)$

(45) $\{(\sim c \supset a) \supset (\sim a \supset c)\} \supset \{(\sim c \supset a) \supset ((c \supset a) \supset a)\}$

(46) $(\sim c \supset a) \supset ((c \supset a) \supset a)$

(47) $(\sim c \supset b) \supset \{(b \supset a) \supset ((c \supset a) \supset a)\}$

(48) $(d \supset (\sim c \supset b)) \supset \{(b \supset a) \supset ((c \supset a) \supset (d \supset a))\}$

(49) $(\sim c \supset b) \supset \{(c \supset a) \supset ((b \supset a) \supset a)\}$

(50) $(c \supset a) \supset \{(b \supset a) \supset ((\sim c \supset b) \supset a)\}$

(51) $(d \supset (c \supset a)) \supset \{(b \supset a) \supset (d \supset ((\sim c \supset b) \supset a))\}$

この51個の論理法則がどのように結びついているか——，これをわかりやすく図示するために，次の記法を導入する。数字は上述の論理法則の番号を示し，かぎかっこで囲まれた番号——たとえば［31］——は，その番号をもつ論理法則の代入例である。(［31］は31の代入例）代入規則によって［α］が α から推論されるとき，

$$\frac{\alpha}{[\alpha]}$$

と表わし，β が α と $\alpha\supset\beta$ とからモドゥス・ポネンスによって推論されるとき，

$$\frac{\alpha \quad \alpha\supset\beta}{\beta} \text{または} \frac{\alpha\supset\beta \quad \alpha}{\beta}$$

と表わす。また α が β と同じ式であることを，

$$\alpha : \beta$$

と表わす。この約束のもとで，まず(3)〜(7)の論理法則がどのように公理(1)，(2)から導出されるかは，下図のようになる。

$$\dfrac{5 \quad \dfrac{\dfrac{5 \quad \dfrac{\dfrac{1 \quad \dfrac{\dfrac{2 \quad \dfrac{1}{[1]}:2\supset 3}{3} \quad \dfrac{2}{[2]}:3\supset 4}{4}:[1]5}{5}}{[5]}:5\supset 6}{6}}{[6]}:5\supset 7}{7}$$

図 3

さらに，これらの論理法則をも使いながら公理(8)から，法則(9)〜(27)は図 4 のように導出される。
(一度導出された論理法則は証明なしに使う)

(27)までは「否定」が出て来ないが(28)，(31)，(41)は，否定と条件法に関する公理である。これらから他の論理法則がどう導出されるかは図 5 からわかる。

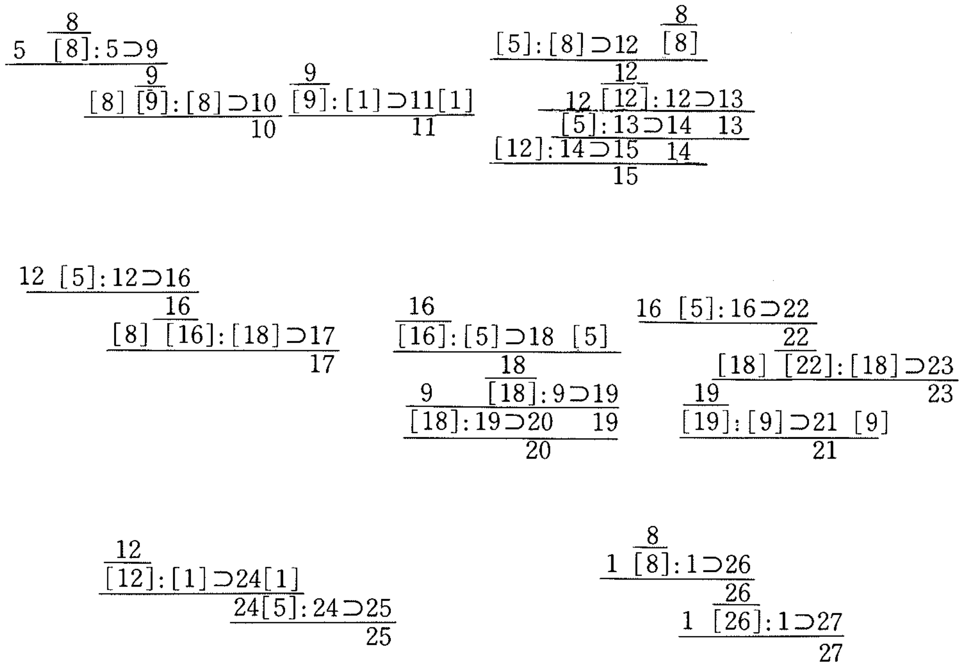


図 4

さて，「否定」と「条件法」だけからなる，このフレーゲの命題論理体系について，いくつかのメタ論理的考察を試みよう。

まず，この公理系は無矛盾である[34]。むろんフレーゲは古典二値論理の立場であるから，通常の真理関数の解釈に従って「否定」と「条件法」を解釈すれば，6つの公理はいずれもトートロジーである。そして代入規則と推論規則はこのトートロジー性を保存する。即ち，α がトートロジーであれば，α の代入例 $S(\alpha)$ がトートロジーであるし，また α と $\alpha \supset \beta$ がトートロジーであれが β もトートロジーである。このことから，フレーゲが提示している論理法則はもちろん，この公理系で導出されるすべての論理法則はトートロジーである。即ちこの体系は健全 (sound) である。ところで $a \supset b$ という式はトートロジーでないから，この体系から導出できない。従って，この体系によって導けない式が少なくとも一つ存在するから，この体系は無矛盾である。

次に，この公理系は意味論的に完全である。即ち，意味論的に解釈された妥当な式（トートロジー）のすべてがこの公理系の定理として導出できるという意味で完全である。証明は，(46)が導出されているからカルマール式でできる[35]。(詳細は略す)

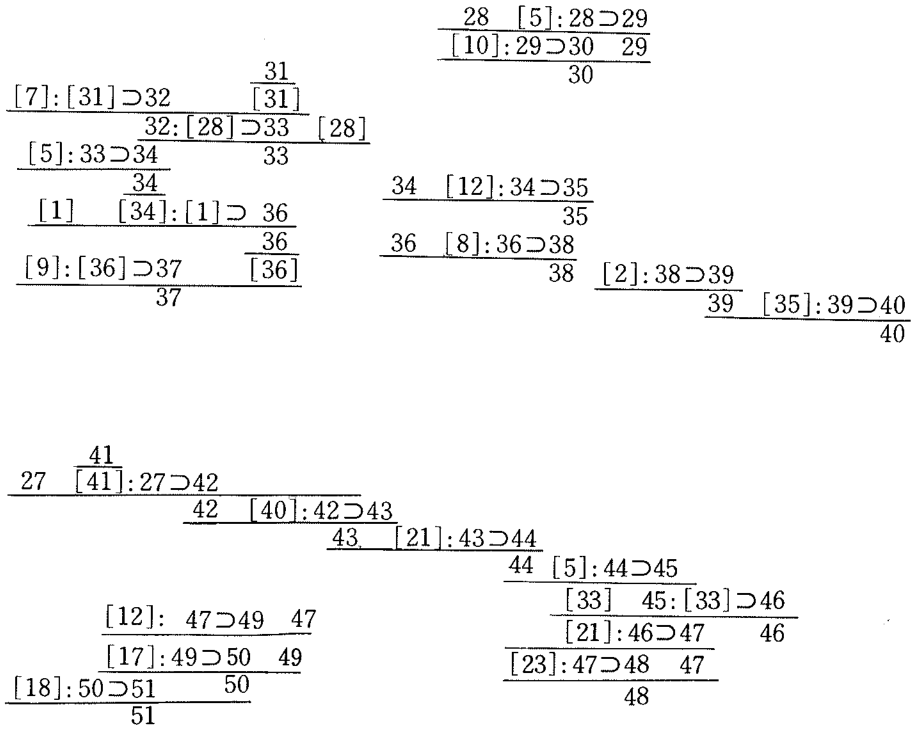


図 5

最後に独立性であるが，６個の公理のうち(8)は独立でない。このことを最初に指摘したのはルカシェヴィッチである[36]。これをわかりやすく整理したのがニールである[37]。ルカシェヴィッチの証明は，比較的短いが，かなり工夫されている。筆者が試みたのは，長いが工夫がいらず[38]，公理(1)(2)のみから(8)が導かれたことを印象づけるものである。以下に筆者の証明を今日流の記法で書く[39]。

1． $(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset (c \supset (b \supset a))\}$　　公理(1)に代入

2． $(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))$　　公理(2)に代入

3． $\{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}$
$\supset [(c \supset (b \supset a)) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$ 公理(1)に代入

4． $(c \supset (b \supset a)) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}$　　2, 3にM. P.

5． $\{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\} \supset [b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$
公理(1)に代入

6． $(5) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset (5)\}$　　公理(1)に代入

7． $(c \supset (b \supset a)) \supset [\{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}$
$\supset [b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]]$　5, 6 にM. P.

8． $(7) \supset \{(4) \supset [(c \supset (b \supset a)) \supset [b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]]\}$

公理(2)に代入

9. (4)$\supset$[$(c \supset (b \supset a)) \supset [b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$] 7,8にM. P.

10. $(c \supset (b \supset a)) \supset [b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$ 4, 9にM. P.

11. $[b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$

$\supset [\{b \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$ 公理(2)に代入

12. (11)$\supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset$(11)$\}$ 公理(1)に代入

13. $(c \supset (b \supset a)) \supset$

$[[b \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}] \supset [\{b \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset$

$(c \supset a))\}]]$ 11, 12にM. P.

14. (13)$\supset$[(10)$\supset [(c \supset (b \supset a)) \supset \{\{b \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}\}]$]

公理(2)に代入

15. (10)$\supset [(c \supset (b \supset a)) \supset \{\{b \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}\}]$ 13, 14にM. P.

16. $(c \supset (b \supset a)) \supset \{\{b \supset (c \supset (b \supset a))\} \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}\}$ 10, 15にM. P.

17. (16)$\supset$[(1)$\supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}\}$] 公理(2)に代入

18. (1)$\supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}\}$ 16, 17にM. P.

19. $(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}$ 1, 18にM. P.

20. $\{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\} \supset \{(b \supset (c \supset b)) \supset (b \supset (c \supset a))\}$ 公理(2)に代入

21. (20)$\supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset$(20)$\}$ 公理(1)に代入

22. $(c \supset (b \supset a)) \supset$(20) 20, 21にM. P.

23. $\{(c \supset (b \supset a)) \supset$(20)$\} \supset [\{(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a)))\}$

$\supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset ((b \supset (c \supset b)) \supset (b \supset (c \supset a)))\}]$ 公理(2)に代入

24. $[(c \supset (b \supset a)) \supset \{b \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))\}]$

$\supset [(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset b)) \supset (b \supset (c \supset a))]$ 22, 23にM. P.

25. $(c \supset (b \supset a)) \supset \{(b \supset (c \supset b)) \supset (b \supset (c \supset a))\}$ 19, 24にM. P.

26. (25)$\supset [\{(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset b))\} \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset a))\}]$

公理(2)に代入

27. $\{(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset b))\} \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset a))\}$ 25, 26にM. P.

28. $b \supset (c \supset b)$ 公理(1)に代入

29. $(b \supset (c \supset b)) \supset \{(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset b))\}$ 公理(1)に代入

30. $(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset b))$ 28, 29にM. P.

31. $(c \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (c \supset a))$ 27, 30にM. P.

32. $(d \supset (b \supset a)) \supset (b \supset (d \supset a))$ 31に代入

これで(8)が(1), (2)から代入規則とモドゥス・ポネンスによって導出されることが示された。それでは残る五つの公理は独立であるか？たしかに独立である。これは3値モデル，及び2値での「否定」の解釈の変更によって証明される[40]。まず3値モデルで調べる。統一的に調べるために真理値集合｛1，2，0｝に真理値束の構造を与え，条件法と否定を順序と補元で解釈する[41]。すると，
* 条件法と否定はそれぞれ表1，表2で与えられる（x_1，x_2，x_3，yは0か2)。そしてx_1，x_2，x_3，yのとり方が，表3，表4で与えられる。

$p \supset q$		q: 1	2	0
p	1	1	x_1	x_2
	2	1	1	x_3
	0	1	1	1

表 1

	x_1	x_2	x_3
①	2	2	2
②	2	2	0
③	2	0	2
④	2	0	0
⑤	0	2	2
⑥	0	2	0
⑦	0	0	2
⑧	0	0	0

表 3

p	$\sim p$
1	0
2	y
0	1

表 2

	y
㋑	2
㋺	0

表 4

これらを組み合わせて，条件法と否定の解釈の対をつくり，(1)(2)(28)(31)(41)の公理が恒真か否かを調べると表5のようになる。(◯は恒真，×は非恒真を示す)

			①②③④⑤⑥⑦⑧
(1)	$a \supset (b \supset a)$	…………………………	◯◯◯◯××××
(2)	$(c \supset (b \supset a)) \supset ((c \supset b) \supset (c \supset a))$		×××◯×××◯
			[①②③④⑤⑥⑦⑧]＋㋑
(28)	$(b \supset a) \supset (\sim a \supset \sim b)$	……………	◯×◯××◯×◯
(31)	$\sim\sim a \supset a$		◯◯◯◯◯◯◯◯

(41)	$a \supset \sim\sim a$	○○○○○○○○
		[①②③④⑤⑥⑦⑧]＋㋺
(28)	$(b \supset a) \supset (\sim a \supset \sim b)$	○○×○○○×○
(31)	$\sim\sim a \supset a$	××××××××
(41)	$a \supset \sim\sim a$	○○○○○○○○

表 5

そして，①～⑧と㋑とを組み合わせた，いずれの解釈の場合も，モドゥス・ポネンスと代入規則は恒真性を保持する。従って，このことと表5より，

公理(1)の独立性は⑧と㋑の解釈の組で，
公理(2)の独立性は①と㋑，③と㋑の解釈の組で，
公理(28)の独立性は④と㋑の解釈の組で，
公理(31)の独立性は④と㋺の解釈の組で，

示せる。しかし，公理(41)の独立性は真理値束とみた3値モデルでは証明できない。そこで，真理値束でない解釈，たとえば，表6の解釈を'⊃'に与えると，これと否定についての㋑の解釈とによって，独立性が示される。

$p \supset q$		q = 1	2	0
p	1	1	2	0
	2	1	1	1
	0	1	1	1

表 6

p	$\sim p$
1	1
0	1

表 8

p	$\sim p$
1	1
0	0

表 7

p	$\sim p$
1	0
0	0

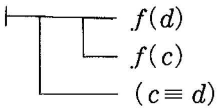
表 9

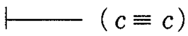
あるいは，(28)(31)(41)の独立性の証明は，条件法を通常の２値で解釈し，否定を表７，表８，表９で解釈すれば，それぞれこの順で得られる。

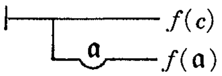
このように，フレーゲのオリジナルの公理系は独立でないが，(8)を除く５個の公理からなる公理系は独立である。

6　述語論理の展開（§20—§22）

フレーゲは§20—§22において，等号をもつ第１階の述語論理を展開している。公理は，等号に関する二つの公理(52)，(54)と，普遍例化の公理(58)である。即ち，

(52)


(54)


(58)


の３個である。これを断定記号を省いて，今日流の記法で書けば，

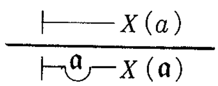
(52)　$(c=d)\supset(f(c)\supset f(d))$

(54)　$c=c$

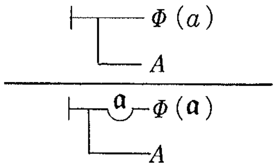
(58)　$\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})\supset f(c)$

となる。(『概念文字』では等号は，「内容の同一」の記号'≡'が使われているが[42]，[Frege 1893] では'='が使われている)

推論規則は，代入規則とモドゥス・ポネンスに加えて，全称化がある。第４節で述べたように，フレーゲは二つの全称化を掲げているが，そのうち，



を基本とし，



は派生規則として説明している。

さて，フレーゲは17個の（等号を含む）述語論理の論理法則を提示している。それらは今日流の記法で書くと以下のようになる。

(52) $(c=d)\supset(f(c)\supset f(d))$

(53) $f(c)\supset((c=d)\supset f(d))$

(54) $c=c$

(55) $(c=d)\supset(d=c)$

(56) $\{(d=c)\supset(f(d)\supset f(c))\}\supset\{(c=d)\supset(f(d)=f(c))\}$

(57) $(c=d)\supset(f(d)\supset f(c))$

(58) $\forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a})\supset f(c)$

(59) $g(b)\supset\{\sim f(b)\supset\sim\forall\mathfrak{a}(g(\mathfrak{a})\supset f(\mathfrak{a}))\}$

(60) $\{\forall\mathfrak{a}(h(\mathfrak{a})\supset(g(\mathfrak{a})\supset f(\mathfrak{a})))\}\supset(g(b)\supset(h(b)\supset f(b)))$

(61) $(f(c)\supset a)\supset(\forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a})\supset a)$

(62) $g(x)\supset\{\forall\mathfrak{a}(g(\mathfrak{a})\supset f(\mathfrak{a}))\supset f(x)$

(63) $g(x)\supset\{m\supset(\forall\mathfrak{a}(g(\mathfrak{a})\supset f(\mathfrak{a}))\supset f(x))\}$

(64) $(h(y)\supset g(x))\supset\{\forall\mathfrak{a}(g(\mathfrak{a})\supset f(\mathfrak{a}))\supset(h(y)\supset f(x))\}$

(65) $\forall\mathfrak{a}(h(\mathfrak{a})\supset g(\mathfrak{a}))\supset\{\forall\mathfrak{a}(g(\mathfrak{a})\supset f(\mathfrak{a}))\supset(h(x)\supset f(x))\}$

(66) $\forall\mathfrak{a}(g(\mathfrak{a})\supset f(\mathfrak{a}))\supset\{\forall\mathfrak{a}(h(\mathfrak{a})\supset g(\mathfrak{a}))\supset(h(x)\supset f(x))\}$

(67) $\{(\forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a})\equiv b)\supset(b\supset\forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a}))\}\supset\{(\forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a})\equiv b)\supset(b\supset f(c))\}$

(68) $(\forall\mathfrak{a}f(\mathfrak{a})\equiv b)\supset(b\supset f(c))$

これらが，どのように導出されるかは，前節と同じ記法によれば図６で示される。

ここで注意すべきことがある。われわれはフレーゲの(52)，(54)，(58)の公理を等号をもつ述語論理の公理とみなした。もちろんそのことは正しい。ところが，そうすると(67)，(68)は実は導けない。そのために，'≡'を文の内容の同一とみなして，(52)，(54)，(58)の公理を拡張された命題論理[43]の公理ととれば導出される。そのとき，(67)(68)は上記の今日流の記法で書いた式の意味で（従って少なくともｂは命題と）理解されなければならない。もし，これを述語論理の意味で（つまりｂを個体変項と）とれ

ば，(67)(68)は次のようになるが，これはナンセンスである。

(67)：$\{(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})=b)\supset(b\supset \forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a}))\}\supset\{(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})=b)\supset(b\supset f(c))\}$

(68)：$(\forall \mathfrak{a} f(\mathfrak{a})=b)\supset(b\supset f(c))$

言い換えるならば，註(42)で述べたように，フレーゲは‘≡’を両義的に使っているから，(52)から(66)までを等号をもつ述語論理の式とも，また拡張された命題論理の式とも解しうるが，(67)と(68)は拡張された命題論理の式としか解しえないということである。

このフレーゲの述語論理(等号を含んでも含まなくても)の公理系は無矛盾であり(45)，かつ完全(44)であり，独立である(45)。

$$\dfrac{52 \quad [8]:52\supset 53}{\dfrac{53}{\dfrac{54 \quad [53]:54\supset 55}{\dfrac{55 \quad [9]:55\supset 56}{\dfrac{56:[52]\supset 57[52]}{57}}}}}$$

$$\dfrac{\dfrac{58}{[58]} \quad [30]:[58]\supset 59}{59} \qquad \dfrac{\dfrac{58}{[58]} \quad [12]:[58]\supset 60}{60} \qquad \dfrac{58 \quad [9]:58\supset 61}{61}$$

$$\dfrac{[24]:62\supset 63 \quad \dfrac{\dfrac{58}{[58]} \quad [8]:[58]\supset 62}{62}}{63} \qquad \dfrac{[61]:[64]\supset 65 \quad \dfrac{\dfrac{62 \quad [18]:62\supset 64}{64}}{[64]}}{65} \qquad \dfrac{\dfrac{58 \quad [7]:58\supset 67}{[57] \quad 67:[57]\supset 68}}{68}$$

$$\dfrac{[8]:65 \quad 66}{66}$$

図　6

［付記］この小論では『概念文字』第三章を扱う余裕がなかった。次の機会に譲りたい。尚，脱稿後，［Kluge 1980］が手に入った。　　　　(1981．5．17)

註

(1) 考察対象となる論理と，考察する論理のレヴェルに差をつけて，前者を対象論理，後者をメタ論理とすることで困難は一応回避できる。がメタ論理そのものの対象論理との異同の問題は以然として残される。

(2) 原典テキストとしては [Frege 1879] がある。またすぐれた英訳・解説として [Bynum 1972] がある。筆者も多くをこれに負う。"概念文字" の訳語は [石本　1972] に従う。

(3) フレーゲは「算術」(Arithmetik) という語を，代数や微積分や解析をも含めて使っていた。[Bynum 1972] p.55の脚註5を見よ。

(4) 今日いうところの「論理主義」(logicism) の最初の具体化の試みがフレーゲのプログラムであった。この数理哲学は形式主義とともに今日生きていないとする見方もある ([Dummett 1977] の introductory remark 参照) が，その実在論的傾向は，集合論のモデル理論での駆使という形で姿を変えて今日も生きているともいえる (cf. [Mostowski 1965] の introduction)。

(5) 言語哲学 (あるいは分析哲学) の父は，ヴィトゲンシュタインでもラッセルでもなくフレーゲであるという見方を筆者は [Dummett 1973] から学んだ。

(6) ①命題関数の発明，②量化理論の発明，③第1階の述語論理の最初の登場，④論理体系の方法の最初の使用，⑤命題論理の論理体系としての最初の定式化，⑥関係の祖先の最初の定式化，⑦数学的帰納法による証明の最初の論理的分析，⑧ (実質上の) 真理表による論理結合詞の定義と公理の正当化の最初の試み，⑨論理体系における質料含意の最初の使用，⑩変項 (フレーゲのいう文字) の概念の最初の，明確かつ首尾一貫した説明，⑪公理と推論規則の最初の明確な区別。([Bynum 1972] pp.13—14)

(7) "$\vdash$" は現在では (公理体系での) 証明可能性を示す記号として用いられるのが普通である。[Kleene 1952] によればこの意味で初めて使ったのはロッサーやクリーネである ([Kleene 1952] p.88 参照)。ラッセルとホワイトヘッドは Principia Mathematica で，"$\vdash$" を asserition sign として用いたが，内容線は用いていない (cf, [Church1956] p.24 脚註65)

(8) [Sluga 1980] p. 76 ff. 参照。

(9) 意図 (intention) や慣用 (convention) の，断定 (assertion) との関わりについての興味深い分析が [Dummett 1973] ch. 10. Assertion p. 299 ff. にある。

(10) これは [Bell 1979] pp. 97—8 の指摘である。

(11) [Bell 1979] p.88。これは [Geach 1965] p.452からの引用。

(12) cf, [Łuhasiewicz 1935]

(13) H. Sluga もこの点を強調している。[Sluga 1980] pp. 90—95 参照。

(14) この点は「関数」についてのフレーゲの考え方にはっきりと現われている。

(15) [Frege 1918] でもこのことが語られている。

(16) Sinn (意味) と Bedeutung (指示対象) の区別については，[Dummett 1973] ch. 5，6，7，　拙稿 [田畑 1980] 四参照。

(17) [Frege 1893] §5 参照。

(18) 註(6)参照。

(19) [Sluga 1980] p. 78　参照。

(20) モドゥス・ポネンスの推論規則とは以下の形式のものである。

(21) cf. [Sluga 1980] p. 80 ff.

(22) (平叙)文の「意味」は，フレーゲの場合，他の文との関連は切り離して，独立に，その文の表現する思想(Gedanke)として決定されうるというのが基本的と思われる。これについては，たとえば，[Dummett 1975] 参照。

(23) 本論の第1節参照。

(24) cf. [Sluga 1980] p.92.

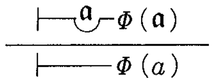
(25) cf. [Flege 1891]，[Flege 1904] など。

(26) これについては，たとえば [Dummett 1973] ch. 7, 8, 拙稿 [田畑1980] 三節，など参照。

(27) たとえば［Sluga 1980］によると，Dummett も含め，解釈者たちは概念や関係を関数の一種とみなすことは1891年以降の新発展とみなすが，Sluga 自身はその同一視はすでに *Begriffsschrift* にあり，一貫して変わらないとみなしている。(［Sluga 1980］ p. 86)

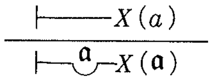
(28) これはある種の文脈原理——即ち「言葉の意味は文（あるいは文脈）の中において定まる」という原理——である。これは［Frege 1884］で初めて明確に述べられた。この文脈原理はフレーゲの思想のうちでも問題の多いものであり解釈者たちを悩ませてきた。［Sluga 1980］ p.94—5 によると，解釈者のうち Carnap はこれを無視し，他の人 (Thiel など) は中心的位置を与えようとした。Dummett は①これが弱く解釈さるべきことを示そうとし，また②『意味と指示対象について』以後，フレーゲはこれを捨てた，とみる。しかしこれは矛盾した見方だと Sluga は反対して，文の意味が語の意味に論理的に先行しているというフレーゲの考えは『概念文字』以来一貫していると見るようである。筆者は現在のところまだ決定的な見解は述べられない。今後の課題としたい。

(29) 全称除去の推論とは以下の形の推論である。

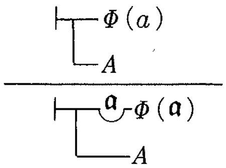


ただし $\phi(a)$ は $\phi(\mathfrak{a})$ の $\mathfrak{a}$ のすべての出現 (occurrence) を a に替えて得られる。

(30) この全称化の推論規則とは，



と，



である。後者においてはドイツ文字“$\mathfrak{a}$”はAに出現しない。全称化のとき，全称化を受ける文字はラテン・イタリック体で書かれる。

(31) 伝統的論理学の対当表との比較・分析については［Strawson 1952］ ch. 6. 参照。

(32) cf.［Sluga 1980］ p. 71

(33) 註(20)参照。

(34) ここでいう無矛盾とは，ある論理式Aとその否定～Aとがともに導出されえないという，構成論的意味の無矛盾性をいう。(36) a ⊃（～a ⊃ b）がフレーゲの体系では導出できるから，この意味での矛盾とはすべての式（もちろん正しく形成された式 well formed formula）がこの体系で導出できることをいう。従って，この体系が無矛盾のときかつそのときのみ，この体系で導出できない式が少なくとも一つ存在する。

(35) カルマール式の証明が初めて行なわれたのは［Kalmár 1934-5］においてである。また［Kleene 1952］§ 29,［Kleene 1967］§12.［杉原1967］ p. 68 ff. にもある。

(36) ［Łukasiewicz 1935］参照。

(37) ［Kneale 1962］ pp. 490—491,

(38) A_1, …A_nの仮定からBを導出する演繹が B_1, …B_m (B_m=B) とするとき，A_1, …A_{n-1}の仮定から A_n⊃Bを導出する演繹が，A_n⊃B_1, …, A_n⊃B_mよりつくられるというアイディアによる。

(39) 以下の証明のうち，かっこで囲まれた数字は，その数字を通し番号にもつ式を表わしている。また，M. P. と

はモドゥス・ポネンスの略記である。

(40) この独立性の証明は［Thiel 1965］にあることを，筆者は［Bynum 1972］p. 72 の脚註92によって知ったが，Thiel の本が手元になく見ることができない。そこで自分で調べてみることにした。しかし3値モデルで，この独立性証明のできるモデルがどれほどあるか，それを調べる一般的方法があるのか筆者は現在知らない。もちろん'⊃'の解釈は $3^9=19683$ 通り'～'の解釈も27通り，従ってせいぜい $19683\times27=531441$ 通り調べればよいのではあるが…。

(41) 束（とくに真理値束）とは演算∪（結），∩（交）が定義され次の5つの公理をもつ（真理値の）集合である。

1．$a=a$　（同一律）

2．$a=b,\ A(a)\rightarrow A(b)$　（等値代入）

3．$a\cup b=b\cup a,\ a\cap b=b\cap a$　（交換律）

4．$a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c,\ a\cap(b\cap c)=a\cap(b\cap c)$　（結合律）

5．$a\cup(a\cap b)=a,\ a\cap(a\cup b)=a$　（吸収律）

順序 $a\leq b$ は $a\cap b=a$ と定義される。

そして，すべての真理値の結，交，を最大元，最小元といい，それぞれ1，0で表わす。このときaの補元 a' は $a\cup a'=1$，$a\cap a'=0$ で与えられる真理値である。詳しくは［杉原1967］を参照。

(42) つまり，フレーゲは『概念文字』においては，個体という対象の同一を示すのにも，また命題の意味内容の同一を示すのにも，'≡'という一つの記号を用いている。今日では，個体（対象）の同一を示すには'＝'が，命題の真偽の観点から見た同一性（同値性），あるいは命題の相互導出可能性としての同値性を示すのには'≡'が用いられる。

(43) 拡張された命題論理とは，命題変項に作用する全称あるいは存在量化記号あるいはその両方をもつ命題論理をいう。cf.［Church 1956］§28.

(44) 等号を含まないフレーゲの述語論理の公理系は［ヒルベルト＆アッケルマン　1954］と同等であるから完全である。等号を含む述語論理の完全性証明は，［杉原1967］p.143 ff　［Kleene 1967］§52，などにある。

(45) 無矛盾性，独立性についても［杉原1967］p.142―3参照。

参 考 文 献

[Angelelli 1967] : I. Angelelli, *Studies on Gottlob Frege and Traditional Philosophy.* Reidel, 1967.

[Bell 1979] : D. Bell, *Frege's Theory of Judgement.* Oxford Clarendon Press, 1979.

[Bynum 1972] : *Gottlob Frege, Conceptual Notation and Related Articles,* transl. and ed. by T. W. Bynum. Oxford Clarendon Press, 1972.

[Church 1956] : A. Church, *Introduction to Mathematical Logic.* Princeton U. P., 1956.

[Dummett 1973] : M. Dummett, *Frege——Philosophy of Language.* Harper & Row, 1973.

[Dummett 1975] : M. Dummett, "Frege's Distinction between Sense and Reference". [Dummett 1978] に収録. (pp. 116-144)

[Dummett 1977] : M. Dummett, *Elements of Intuitionism.* Oxford Clarendon Press, 1977.

[Frege 1879] : G. Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze,* ed. I. Angelelli. Hildesheim G. Olms, 1964.

[Frege 1884] : G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik, Eline logisch - mathematische Untersuchung üder den Begriff der Zahl.* Breslau : W. Koeber, 1884.

[Frege 1891] : G. Frege, *Funktion und Begriff,* Jena : H. Pocle, 1891. [Geach & Black 1952] に収録.

[Frege 1892(1)] : G. Frege, "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische kritik* 100. 1892. pp. 25-50 [Geach & Black 1952] に収録.

[Frege 1892(2)] : G. Frege, Über Begriff und Gegenstand". *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie,* 16. 1892, pp. 192-205. [Geach & Black 1952] に収録.

[Frege 1893] : G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik, Begriffsschriftlich abgeleitet,* Band I. Jena : H. Pohle, 1893. Reprinted, together with Volume II, in 1962 by G. Olms, Hildesheim. Partially translated by M. Furth. (Furth 1964)

[Frege 1904] : G. Frege, "Was ist eine Funktion ?", *Festschrift* Ludwig Boltzmann *gewidmet zum sechzigsten Geburtstage,* 20. Februar 1904. pp. 656-66. Leipzig : A. Barth. [Geach & Black 1952] に収録。

[Frege 1918] : G. Frege, "Die Verneinung : Eine logische Untersuchung". *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus,* 1. 1918. pp. 143-57 [Geach & Blach 1952] に収録。

[Furth 1964] : M. Furth, *Gottlob Frege, The Basic Laws of Arithmetic, Exposition of the System.* Translation with introduction. Uni. of California Press, 1964.

[Geach 1965] : P. T. Geach, "Assertion", *Philosophical Review,* lxxiv (1965) pp. 448-54. [Geach 1972] に再録。

[Geach 1972] : P.T. Geach, *Logic Matters.* Oxford. 1972.

[Geach & Black 1952] : P. Geach & M. Black, (ed. and transl.) *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege.* Basil Blackwell 1952.

[Hilbert & Ackermann 1928] : D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik,* Springer, 1928.

[Kalmár 1934-5] : L. Kalmár. "Über die Axiomatisierbarkeit des Aussagenkalküls," *Acta Litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae, Sectio scientiarum mathematicarum* (Szeged). vol. 7, 1934-5. pp. 222-43.

[Kleene 1952] : S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics,* North-Holland, 1952.

[Kleene 1967] : S. C. Kleene, *Mathematical Logic,* John Wiley & Sons, Inc. 1967.

[Kluge 1980] : E. -H. W. Kluge, *The Metaphysics of Gottlob Frege, An Essay in Ontological Reconstruction.* Martinus Nijhoff, 1980.

[Kneale 1962] : W. & M. Kneale, *The Development of Logic,* Oxford U. P., 1962.

[Łukasiewicz 1935] : J. Łukasiewicz, "Zur Geschichte der Aussagenlogik", *Erkenntnis* 5, 1935. pp. 111-31.

[Łukasiewicz 1970] に再録。
[Łukasiewicz 1970] : J. Lukasiewicz, *Selected Works*, ed. by L. Borkowski, North-Holland, 1970.
[Mostowski 1965] : A. Mostowski, *Thirty Years of Foundational Studies, Lectures on the Development of Mathematical Logic and the Study of the Foundations of Mathematics in 1930-1964, Acta Phil. Fennica* xvii (1965) pp. 1-180. [Mostowski 1979] に再録。
[Mostowski 1979] : A. Mostowski, *Foundational Studies, Selected Works*, vol. I, II., North-Holland, 1979.
[Sluge 1980] : H. Sluga, *Gottlob Frege*, Routledge & Kegan Paul, 1980.
[[Strawson 1952] : P. F. Strawson, *Introduction to Logical Theory*, London, 1952.
[Thiel 1965] : C. Thiel, *Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlob Freges*, Meinenheim am Glan : A. Hain, 1965.
[石本 1972]：石本新訳編『論理思想の革命』，東海大学出版会，1972.
[杉原 1967]：杉原丈夫『数学的数理学』，槇書店，昭和42年。
[田畑 1980]：田畑博敏“主語・述語からアーギュメント・関数へ——フレーゲ論理学の「意味論」的基礎づけ——”，『哲学年報』第三十九輯，九州大学文学部，昭和五十五年．pp.91-118.
[ヒルベルト&アッケルマン 1954]：伊藤誠訳『ヒルベルト・アッケルマン，記号論理学の基礎』，大阪教育図書，1954．これは，[Hilbert & Ackermann 1928] の第三版の翻訳である。

Frege's Logic

——A Study of *Begriffsschrift* I , II——

In *"Begriffsschrift"*, one of the greatest works in the history of logic, perhaps even in the history of human thought, Gottlob Frege prepared a preliminary survey in logic for his logicism program of reducing arithmetic to logic. After giving, in chapter I, a logico-philosophical analysis of concepts which are of fundamental importance for developing his survey in logic, for example, those of judgement, conditionality, negation, identity of content, argument and function, and generality, he presented as aximatic systems propositional logic and first-order predicate logic with equality in chapter II. His system of propositional logic has properties of syntactical consistency and semantical completeness, and independenc, of derivability can be shown if only the axiom (8) is eliminated. His system of predicate logic with or without equality also has the above properties.